Étude de la nature d'une intégrale

1 Comment étudier la convergence d'une intégrale ?

On souhaite déterminer la nature d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, *i.e.* savoir si cette intégrale est convergente ou divergente.
Pour cela, on essaye d'appliquer les différents critères du cours, de préférence dans cet ordre :

1. On cherche l'intervalle sur lequel f est continue : $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$.
   a) Si f est continue sur le segment $[a\,;b]$ alors l'intégrale est convergente.
   b) Si f est continue sur $]a\,;b[$, on sépare l'intégrale en deux et on mène deux études de convergence sur des intervalles semi-ouverts. $\rightsquigarrow$ ex. 3
2. Grâce au premier point, on est ramené au cas où f est continue sur $[a\,;b[$ (ou sur $]a\,;b]$, la méthode est symétrique).
   a) Si on sait calculer une primitive de f, revenir à la définition d'une intégrale convergente. $\rightsquigarrow$ ex. 1
   b) On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en b, *i.e.* si f admet une limite finie lorsque x tend vers b. Si tel est le cas, l'intégrale est faussement impropre donc convergente. $\rightsquigarrow$ ex. 2
   c) Quel est le signe de f ? Si f est de signe constant, passer au point suivant. Sinon (changements de signe ou complexes), procéder de même mais en faisant une étude d'intégrabilité, *i.e.* de convergence absolue en considérant $|f|$.
   d) Déterminer un équivalent simple de f lorsque $x \to b$. (Les DL peuvent être utiles.) $\rightsquigarrow$ ex. 3
   e) Utiliser une comparaison, *i.e.* majorer f au voisinage de b par une fonction dont l'intégrale est convergente ou minorer f au voisinage de b par une fonction dont l'intégrale est divergente. $\rightsquigarrow$ ex. 3
   f) Comparer à une intégrale de Riemann en calculant $\displaystyle\lim_{x\to b} x^\alpha f(x)$ avec α bien choisi. $\rightsquigarrow$ ex. 4
   g) Utiliser un changement de variable ou une IPP. $\rightsquigarrow$ ex. 6 & 7
3. Dans le cas où l'on a séparé l'intégrale en deux, on conclut : par définition, il y a convergence sur $]a\,;b[$ si et seulement s'il y a convergence sur $]a\,;c]$ et sur $[c\,;b[$.

Exemple 1 – *Nature de* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \frac{1}{\cos^2(x)}$ est continue sur $[0\,;\pi/2[$.
On connaît une primitive de g. On pose $X \in [0\,;\pi/2[$ et on a

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \Big[\tan x\Big]_0^X = \tan(X) - 0 \xrightarrow[X\to(\frac{\pi}{2})^-]{} +\infty,$$

donc l'intégrale I est divergente.

Exemple 2 – *Nature de* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \frac{\arctan x}{x}$ est continue sur $]0\,;1]$. De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. L'intégrale J est ainsi faussement impropre en 0 donc convergente.

Exemple 3 – *Nature de* $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \overset{h}{\longmapsto} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$. On va donc étudier la nature des deux intégrales

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

(Le choix de couper en $1 \in\,]0\,;+\infty[$ est arbitraire.)
1. On a $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$. Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (Riemann), par équivalence, h est intégrable en 0. Ainsi K_1 est absolument convergente donc convergente.
2. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant h(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente en $+\infty$ (cours), par comparaison de fonctions positives, l'intégrale K_2 est convergente en $+\infty$.
Bilan : comme les deux intégrales K_1 et K_2 sont convergentes, on peut conclure que K est convergente.

Remarque. Si l'une des deux intégrales K_1 ou K_2 avait été divergente, l'étude de la seconde aurait été inutile : automatiquement K aurait été divergente.

Exemple 4 – *Nature de* $L = \int_0^1 (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \overset{i}{\longmapsto} (\ln t)^2$ est continue sur $]0\,;1]$.
Par croissances comparées $\lim_{t\to 0^+} t^{1/2}(\ln t)^2 = 0$ donc $i(t) \underset{0^+}{=} o\Big(\frac{1}{t^{1/2}}\Big) \underset{0^+}{=} O\Big(\frac{1}{t^{1/2}}\Big)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0, par comparaison i est aussi intégrable en 0. Autrement dit L est absolument convergente donc convergente.

2 Comment calculer la valeur d'une intégrale ?

On considère une intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dont on a montré la convergence et on cherche à calculer sa valeur. Pour cela, il existe principalement trois méthodes :

- le calcul direct dans le cas où l'on connaît une primitive de f ; $\rightsquigarrow$ ex. 5
- l'intégration par parties ; $\rightsquigarrow$ ex. 6
- l'utilisation d'un changement de variable. $\rightsquigarrow$ ex. 7

Remarquons que ces trois méthodes permettent aussi de conclure quant à la nature d'une intégrale ; on peut donc obtenir en même temps la convergence et la valeur. ⚠ Cependant il faut alors être prudent : on n'écrit pas d'égalités entre intégrales dont on n'a pas prouvé la convergence.

Exemple 5 – *Convergence et valeur de* $M = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

La fonction $x \overset{j}{\longmapsto} \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et on en connaît une primitive. Soit $X > 0$. On a

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^X = \arctan X - 0 \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Comme la valeur est finie on en déduit que l'intégrale M est convergente (en $+\infty$) et que $M = \frac{\pi}{2}$.

Remarque. On pouvait montrer facilement la convergence grâce à un équivalent en $+\infty$. Cela aurait permis de faire le calcul directement avec la borne infinie. En revanche l'équivalent ne donne aucune information sur la valeur.

Exemple 6 – *Convergence et valeur de* $N = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \overset{k}{\longmapsto} t\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
On va procéder par intégration par parties. Les fonctions $u\colon t \longmapsto t$ et $v\colon t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ et $u(t)v(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ (croissances comparées). Les intégrales N et $\int_0^{+\infty} 1 \times (-\mathrm{e}^{-t})\,dt$ sont donc de même nature, donc convergentes (cette dernière est une intégrale de référence). Alors

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \Big[-t\,\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi l'intégrale N est convergente et $N = 1$.

Remarque. On aurait aussi pu commencer par montrer que la fonction k est intégrable en $+\infty$ en remarquant que $t\,\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$.

Exemple 7 – *Convergence et valeur de* $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

La fonction $x \overset{\ell}{\longmapsto} \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$ (le dénominateur est strictement positif comme somme de deux exponentielles).
On pose $u = \mathrm{e}^x$, *i.e.* $x = \ln(u)$ qui est une bijection croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;+\infty[$. Par changement de variable, l'intégrale P est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u+1/u}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

Or, d'après l'exemple 5, cette dernière intégrale est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, l'intégrale P est convergente et $P = \frac{\pi}{2}$.